Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0,+\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.
On dit que la fonction f est « k-forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0.$$

On dit que f est « k-faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0.$$

I – Quelques exemples et propriétés

1) Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
2) Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0,1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
3) Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
4) Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$.
5) Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?

II – Quelques critères de force et de faiblesse

6) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7) Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \leqslant \frac{\max\left(f(x), f(y)\right)}{\min\left(f(x), f(y)\right)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max\left(x^k, y^k\right)}{\min\left(x^k, y^k\right)} \geqslant \frac{\max\left(f(x), f(y)\right)}{\min\left(f(x), f(y)\right)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8) On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par

$$g_k(x) = x^k f(x) \text{ et } h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}.$$

a) Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.

b) Démontrer que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.

c) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x & \text{si } 1 < x < 2; \\ 4x & \text{si } 2 \leqslant x. \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

a) Démontrer que, si $|f'(x)| \geqslant k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

b) Démontrer que, si $|f'(x)| \leqslant k\dfrac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.

c) Démontrer que les réciproques aux questions 9)a) et 9)b) sont vraies.

III – Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10) Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est faible.

11) Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sont faibles.

12) Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.

13) Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

a) Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.

b) Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

IV – Application à la démonstration d'inégalités

14) Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

15) Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

La fonction tan est définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}.$$